5. Klasse

Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ bezeichnet: $\mathbb{N} = \{1;2;3;4;...\}$. Gehört eine Zahl zur Menge der natürlichen Zahlen, so schreibt man dies mit dem Elementzeichen: $7 \in \mathbb{N}$ (7 ist eine natürliche Zahl), aber $1{,}5 \notin \mathbb{N}$ (1,5 ist keine natürliche Zahl).
Große natürliche Zahlen werden (häufig in Physik) zur Vereinfachung mit Hilfe von Zehnerpotenzen dargestellt: $\underbrace{10^4}_{\text{Potenz mit Basis 10 und Exponent 4}} = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}_{4\text{-mal}} = \underbrace{10\,000}_{4 \text{ Nullen}}$

Bsp.: 450 Millionen $= 450\,000\,000 = 45 \cdot 10\,000\,000 = 45 \cdot 10^7$

Grundrechenarten

Addition („Plus-Rechnen"): $\underbrace{3}_{=1.\text{ Summand}} + \underbrace{4}_{=2.\text{ Summand}} = \underbrace{7}_{=\text{Wert der Summe}}$

Subtraktion („Minus-Rechnen"): $\underbrace{9}_{=\text{Minuend}} - \underbrace{6}_{=\text{Subtrahend}} = \underbrace{3}_{=\text{Wert der Differenz}}$

Multiplikation („Mal-Rechnen"): $\underbrace{4}_{=1.\text{ Faktor}} \cdot \underbrace{7}_{=2.\text{ Faktor}} = \underbrace{28}_{=\text{Wert des Produkts}}$

Division („Geteilt-Rechnen"): $\underbrace{18}_{=\text{Dividend}} : \underbrace{3}_{=\text{Divisor}} = \underbrace{6}_{=\text{Wert des Quotienten}}$

Rechengesetze

Kommutativgesetz der Addition: $a+b = b+a \;;\; a,b \in \mathbb{N}$

Assoziativgesetz der Addition: $a+(b+c) = (a+b)+c \;;\; a,b \in \mathbb{N}$

Distributivgesetz: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \;;\; a,b \in \mathbb{N}$

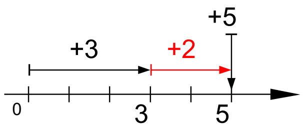
Ganze Zahlen

Die Menge der ganzen Zahlen wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet: $\mathbb{Z} = \{...,-2,-1,0,1,2,...\}$.

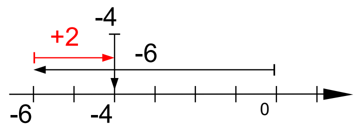
Betrag: Der Betrag einer ganzen Zahl ist ihr Abstand vom Nullpunkt der Zahlengerade.
Bsp.:"Betrag von -4" $= |-4| = 4$

Addition:

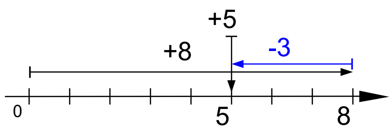
(+3) + (+2) = +5



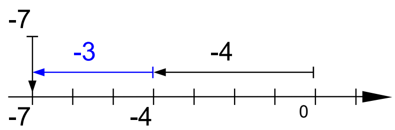
(-6) + (+2) = - 4



(+8) + (-3) = +5



(-4) + (-3) = -7

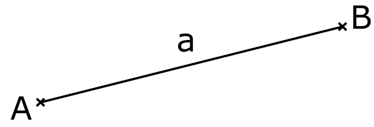


Subtraktion: Jede Subtraktion lässt sich auch als Addition schreiben.
Bsp.: $3-7 = (+3)+(-7) = -(7-3) = -4$

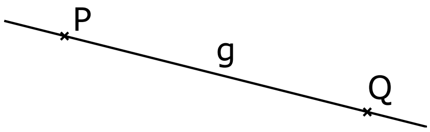
Multiplikation/Division: Multipliziert bzw. dividiert man zwei ganze Zahlen mit gleichen Vorzeichen, so ist das Ergebnis das positive Produkt bzw. der positive Quotient der Beträge: $(+3)\cdot(+6) = +18$. Multipliziert bzw. dividiert
$(-4)\cdot(-9) = +36$
man zwei ganze Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen, so ist das Ergebnis das negative Produkt der Beträge: $(+5)\cdot(-4) = -20$
$(-7)\cdot(+6) = -42$

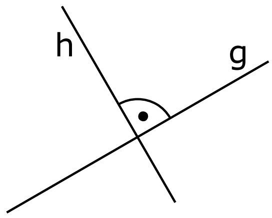
Geometrische Grundbegriffe

Strecke: a = [AB]
Die Länge der Strecke [AB] wird mit $\overline{AB}$ bezeichnet.

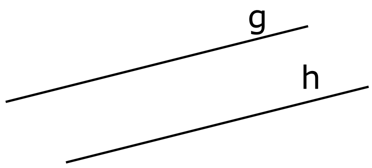


Gerade: g = PQ



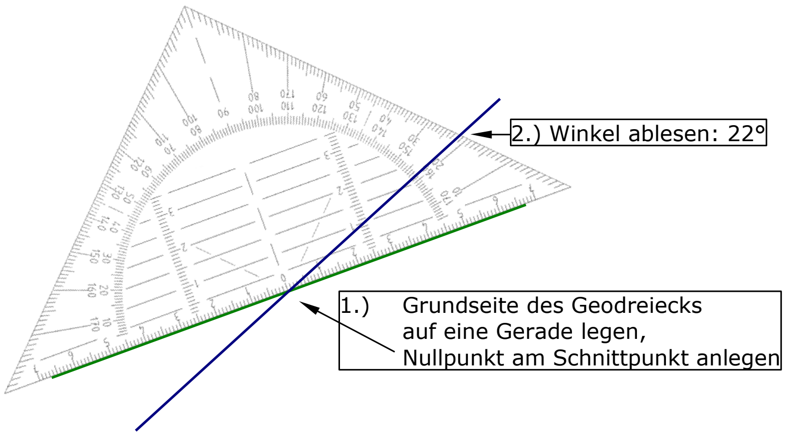


g und h stehen aufeinander senkrecht



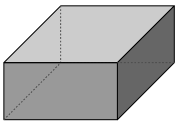
g und h sind zueinander parallel

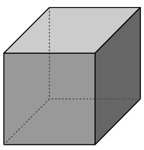
Winkel messen und zeichnen:
Beim Messen von Winkeln wie rechts abgebildet vorgehen. Um Winkel zu zeichnen, zuerst die grüne Grundlinie zeichnen, beim Nullpunkt des Geodreiecks eine Markierung machen und ebenso bei der entsprechenden Gradzahl. Zum Schluss eine Gerade durch beide Markierungen zeichnen.

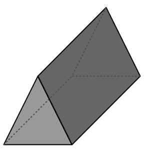


Ein Winkel heißt…	*…wenn er so groß ist:*
…spitzer Winkel…	zwischen 0° und 90°
…rechter Winkel…	genau 90°
…stumpfer Winkel…	zwischen 90° und 180°
…gestreckter Winkel…	genau 180°
…überstumpfer Winkel…	zwischen 180° und 360°

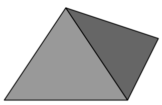
Körper

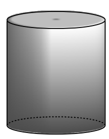

Quader

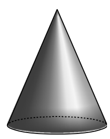

Würfel


Prisma


Kugel


Pyramide


Zylinder


Kegel

Flächeneinheiten

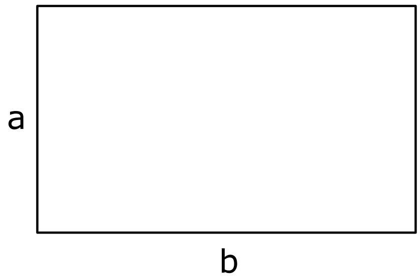
1 ha = 1 Hektar, 1 a = 1 Ar

1 km² = 100 ha
1 ha = 100 a
1 a = 100 m²
1 m² = 100 dm²
1 dm² = 100 cm²
1 cm² = 100 mm²

Umfang und Flächeninhalt des Rechtecks

Ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b hat…

- ...den Umfang $u = a+b+a+b = 2a+2b$,
- ...den Flächeninhalt $A = a \cdot b$.



Beachte: Der Umfang ist eine Streckenlänge mit einer Längeneinheit mm, cm, dm,…), der Flächeninhalt ist eine Fläche und hat als Flächeneinheit mm², cm²,...

Griechisches Alphabet

A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ε (ϵ)	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	ϑ (θ)	Theta
I	ι	Jota
K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	My
N	ν	Ny
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omikron
Π	π (ϖ)	Pi
P	ϱ (ρ)	Rho
Σ	σ (ς)	Sigma
T	τ	Tau
Υ	υ	Ypsilon
Φ	φ (ϕ)	Phi
X	χ	Chi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

6. Klasse

Brüche

Allgemein gilt: $\frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$ = Zähler : Nenner ; Nenner$\neq$0

Arten verschiedener Brüche:

Stammbrüche:	$\frac{1}{n}$; $\frac{1}{1} = 1$
Echte Brüche: Zähler < Nenner	z.B.: $\frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{9}{10}; \frac{8}{13}$
Unechte Brüche: Zähler ≥ Nenner	z.B.: $\frac{13}{3}; \frac{5}{3}; \frac{13}{7}; \frac{3}{3}$
Scheinbrüche: Zähler = 0 oder Zähler = n · Nenner	z.B.: $\frac{0}{13}$ (=0); $\frac{4}{4}$ (=1); $\frac{9}{3}$ (=3); $\frac{20}{5}$ (=4)
gemischte Zahlen: alle unechten Brüche, die keine Scheinbrüche sind. Jede gemischte Zahl besteht aus einer natürlichen Zahl und einem echten Bruch.	z.B.: $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$; $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$; $\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$

Erweitern eines Bruches: $\frac{z}{n} = \frac{k \cdot z}{k \cdot n}$ $k \in \mathbb{N}_0$; $n, k \in \mathbb{N}$

Kürzen eines Bruches: $\frac{z}{n} = \frac{z:k}{n:k}$ $z, n, k \in \mathbb{N}$; wobei k ein gemeinsamer Teiler von n und z sein muss

Addieren und Subtrahieren von Brüchen

- bei gleichem Nenner:

  $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$

  $\frac{c}{n} - \frac{d}{n} = \frac{c-d}{n}$

  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$

  $c \geq d$; $n \in \mathbb{N}$
- bei ungleichem Nenner muss das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) gefunden werden und beide Brüche auf dieses erweitert werden

  Beispiel: $\frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{2}{12} + \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$

Alle positiven und alle negativen Bruchzahlen zusammen mit der Zahl 0 bilden die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

Berechnung des Teils einer Größe

- Beispiel: Ganzes = 120€; Anteil = $\frac{7}{10}$ → $(120\,€ : 10) \cdot 7 = 12\,€ \cdot 7 = 84\,€$

Berechnung eines Anteils

- Beispiel: Ganzes = 100€; Teil = 70€ → $\frac{\text{Teil}}{\text{Ganzes}} = \frac{70}{100} = \frac{7}{10}$

Berechnung des Ganzen

- Anteil = $\frac{7}{10}$; Teil = 70€

  Ganzes = Teil : Nenner · Zähler = 70 € : 7 · 10 = 100 €

Prozent in Bruchschreibweise: $n\,\% = \frac{n}{100}$; $n \in \mathbb{N}$, z.B. $37\,\% = \frac{37}{100}$

Multiplizieren von Brüchen mit natürlichen Zahlen: $a \cdot \frac{z}{n} = \frac{a \cdot z}{n}$; $a, n, z \in \mathbb{N}$

Dividieren von Brüchen durch natürliche Zahlen: $\frac{z}{n} : a = \frac{z}{n \cdot a}$; $a, n, z \in \mathbb{N}$

Multiplizieren von Brüchen: $\frac{z}{n} \cdot \frac{y}{m} = \frac{z \cdot y}{n \cdot m}$; $z, y \in \mathbb{N}_0$; $n, m \in \mathbb{N}$

Auch bei der Multiplikation von Brüchen gelten Kommutativgesetz und Assoziativgesetz.

Dividieren von Brüchen: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$; $a \in \mathbb{N}_0$; $b, c, d \in \mathbb{N}$

Dezimalzahlen

- Umwandlung einer Dezimalzahl in einen Bruch:

  Beispiel: $0{,}7 = \frac{7}{10}$; $3{,}0125 = \frac{30125}{10000} = 3\frac{125}{10000}$ usw...

- Umwandlung eines Bruchs in eine Dezimalzahl:

  Beispiel: $\frac{19}{250} = \frac{19 \cdot 4}{250 \cdot 4} = \frac{76}{1000} = 0{,}076$

Runden

- Ist die erste wegzulassende Ziffer 0, 1, 2, 3, 4 → abrunden
- Ist die erste wegzulassende Ziffer 5, 6, 7, 8, 9 → aufrunden

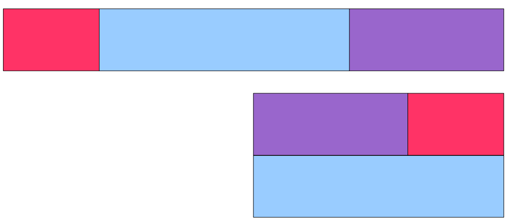
Zufallsexperimente

- k = absolute Häufigkeit; n = Anzahl der Durchführung
- relative Häufigkeit = $\frac{k}{n}$

  $= \frac{\text{so oft ist ein bestimmtes Versuchsergebnis eingetreten}}{\text{so oft ist das Zufallsexperiment durchgeführt worden}}$

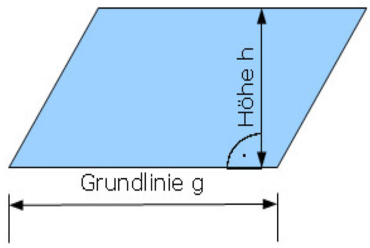
Flächeninhalt

Wenn zwei Figuren sich so zerlegen lassen, dass ihre Teile paarweise die gleiche Form und Größe haben (⇒ deckungsgleich), dann haben diese beiden Figuren den gleichen Flächeninhalt.



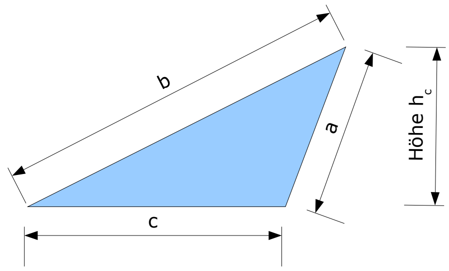
Parallelogramm

- vier Seiten, jeweils gegenüberliegende gleich lang und parallel
- Abstand zweier Parallelen: Höhe h
- Flächeninhalt:
  $A_{Parallelogramm} = A_{Rechteck} =$ Grundseite G $\cdot$ Höhe h



Dreiecke

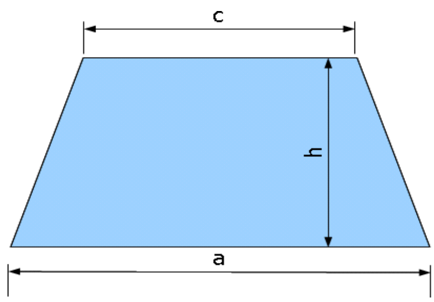
- drei Seiten, bzw. Grundlinien
- Abstand Ecke zur gegenüberliegenden Seite = Höhe h
- Flächeninhalt: $A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot$ Grundseite $\cdot$ Höhe



Trapez

- vier Seiten, zwei gegenüberliegende Seiten parallel
- Abstand zweier Parallelen: Höhe h
- Flächeninhalt: $A_{Parallelogramm} = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$

  (halbe Summe der Grundlinien mal Höhe)

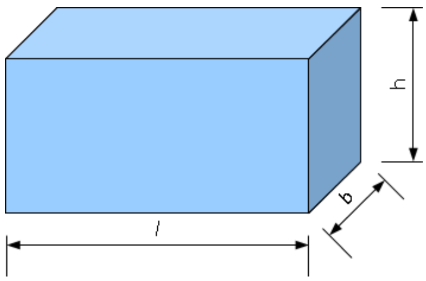


<u>Volumen</u>

- Rauminhalt eines Körpers
- Formelzeichen: V
- Einheit: Kubikmeter bzw. Kubikdezimeter oder Liter
  $1m^3 = 1\ 000dm^3 = 1\ 000\ 000cm^3$
  $1dm^3 = 1$ Liter
  $1mm^3 = 1ml$

Quadervolumen

- Alle Längen in der gleichen Längeneinheit
- $V_{Quader} = l \cdot b \cdot h$ (Länge mal Breite mal Höhe)
- Beim Würfel: $V_{Würfel} = a \cdot a \cdot a = a^3$



<u>Prozentrechnung</u>

- Grundwert $\cdot$ Prozentsatz = Prozentwert
- Prozentsatz $= \frac{\text{Grundwert}}{\text{Prozentwert}}$
- Grundwert $= \frac{\text{Prozentsatz}}{\text{Prozentwert}}$

7. Klasse

Achsensymmetrische Figuren

Eine Figur, deren beide gefaltete Teile miteinander zur Deckung kommen, heißt achsensymmetrisch. Die Faltlinie bezeichnet man als Symmetrieachse.

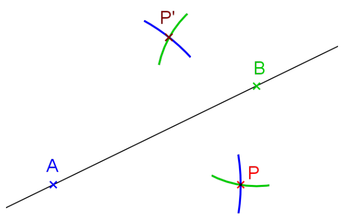
Eigenschaften

Zueinander symmetrische...

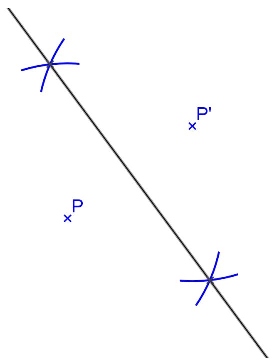
...Kreise sind stets gleich groß,
...Winkel sind gleich groß,
...Strecken sind gleich lang,
...Geraden sind parallel oder schneiden sich auf der Symmetrieachse,
...Figuren sind deckungsgleich,
...Punkte haben die gleiche Entfernung zur Symmetrieachse.

Konstruktion eines Spiegelpunkts

konstruieren = mit Zirkel und Lineal (ohne abzumessen)
Man sticht in einem beliebigen Punkt auf der Spiegelachse ein (hier: A) und zeichnet einen Kreis mit Radius $\overline{AP}$. Dieses Vorgehen wiederholt man mit einem weiteren beliebigen Punkt (hier: B). Dort, wo sich die beiden Kreise schneiden, ist der Spiegelpunkt P' von P.



Wenn zwei Punkte P und P' gegeben sind und man die Symmetrieachse(=Mittelsenkrechte) konstruieren möchte, muss man je einen Kreis um die beiden Punkte mit <u>gleichem</u> Radius ziehen. Es entstehen zwei Schnittpunkte, welche man zu einer Geraden verbindet.



Weitere Grundkonstruktionen

Die Winkelhalbierende eines Winkels erhält man, indem man die Symmetrieachse zu den beiden Schenkeln des Winkels konstruiert. Das Lot zu einer Geraden durch einen Punkt Q erhält man, indem man zu zwei vom Punkt Q gleich weit entfernten Punkten der Gerade die Symmetrieachse konstruiert.

Punktsymmetrie

Eine Figur ist punktsymmetrisch, wenn sie bei einer 180°-Drehung (Halbdrehung) um einen Punkt Z (Zentrum) mit sich selbst zur Deckung kommt.
Die Verbindungsstrecke zweier zueinander punktsymmetrischer Punkte wird vom Symmetriezentrum halbiert.
Zueinander punktsymmetrische...

...Strecken sind stets gleich lang und zueinander parallel.
...Winkel sind stets gleich groß und haben stets den gleichen Drehsinn.
...Geraden sind stets parallel zueinander; das Symmetriezentrum ist von beiden Geraden stets gleich weit entfernt.
...Figuren sind stets deckungsgleich.

Symmetrische Vierecke

Quadrat: punktsymmetrisch, alle vier Winkel gleich groß (90°), alle Seiten gleich lang und die Diagonalen halbieren einander senkrecht.

Raute: punktsymmetrisch, gegenüberliegende Winkel sind gleich groß, alle vier Seiten sind gleich lang und die Diagonalen halbieren einander senkrecht.

Rechteck: punktsymmetrisch, jeder Winkel beträgt 90°, gegenüberliegende Seiten sind jeweils gleich lang, Diagonalen sind gleich lang und halbieren einander.

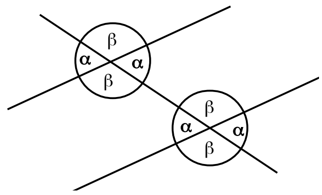
Drachenviereck: beide der Symmetrieachse gegenüberliegenden Winkel sind gleich groß, symmetrisch gelegene Seiten sind gleich lang, Diagonalen stehen aufeinander senkrecht.

Gleichschenkliges Trapez: symmetrisch gelegene Winkel sind gleich groß, symmetrisch gelegene Seiten sind gleich lang, die Diagonalen stehen aufeinander senkrecht.

Parallelogramm: punktsymmetrisch, einander gegenüberliegende Winkel sind gleich groß, gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und parallel, die Diagonalen halbieren einander im Symmetriezentrum.

Winkelbetrachtungen

Alle eingezeichneten Winkel α sind jeweils gleich groß. Die Winkel β ebenso.



Terme und Zahlen

Variablen sind Stellvertreter für Zahlen oder Größen und können in Termen auftreten, z.B. $3x+a\cdot b$. Gleiche Variablen stehen immer stellvertretend für die selbe Zahl.

Umformen von Termen

Kommutativ-Gesetz der Addition: $a+b=b+a$; $a,b,c\in\mathbb{Q}$

Assoziativ-Gesetz der Addition: $(a+b)+c=a+(b+c)$; $a,b,c\in\mathbb{Q}$

Kommutativ-Gesetz der Multiplikation: $a\cdot b=b\cdot a$; $a,b,c\in\mathbb{Q}$

Assoziativ-Gesetz der Multiplikation: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$; $a,b,c\in\mathbb{Q}$

Distributiv-Gesetz der Multiplikation: $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c=ac+bc$; $a,b,c\in\mathbb{Q}$

Distributiv-Gesetz der Division: $(a+b):c=a:c+b:c$ $a,b,c\in\mathbb{Q};c\neq0$

Steht direkt vor einer Klammer ein +, so kann die Klammer weggelassen werden.
Steht vor einer Klammer ein -, so werden Vorzeichen beim Auflösen der Klammer vertauscht: $a+(b+c)=a+b+c$ bzw. $a-(b+c)=a-b-c$

Ausmultiplizieren von Klammern: $(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+ab+bc+bd$; $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$

Gleichungen

Wenn Gleichungen die gleiche Lösungsmenge besitzen, sind sie äquivalent.

z.B. $\left.\begin{array}{ll}\text{(I) } x+3=4 & \Rightarrow x=1 \\ \text{(II) } 2x+4=6 & \Rightarrow x=1\end{array}\right\}\Rightarrow$ Die Gleichungen (I) und (II) sind äquivalent.

Man spricht von Äquivalenzumformung, wenn sich beim Umformen der Gleichung die Lösungsmenge nicht ändert. Die Lösungsmenge ändert sich nicht, wenn man die dieselbe rationale Zahl bzw. denselben Term auf beiden Seiten der Gleichung addiert, subtrahiert, multipliziert (außer 0!) oder dividiert (außer 0!).

$3x+5=21+x \quad |-x$
$2x+5 = 21 \quad |-5$
$2x = 16 \quad |:2$
$x = 8$

Vorgehensweise beim Lösen von Textaufgaben:

- Variable einführen
- Gleichung aufstellen
- Gleichung lösen
- Ergebnis angeben
- Probe durchführen, ob die Lösung korrekt und sinnvoll ist

Statistik

Grundgesamtheit (gibt die gesamte vorhandene Menge aller Daten an): Ω
Stichprobenumfang: n

Vertiefung der Prozentrechnenung

Das Ganze: Grundwert G
Anteil am Ganzen: Prozentsatz p (wird in % angegeben)
entsprechender Teil des Ganzen: Prozentwert P

Allgemein: $\frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}}=\text{Prozentsatz} \qquad \frac{P}{G}=p\%$

Bsp.: 16€ von 80€ entsprechen einem Prozentwert von

$$\frac{16€}{80€} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 20\%$$

Ändert sich der Preis eines Gegenstandes von 25€ auf 29€, so ist der Gegenstand um $\frac{29€-25€}{25€} = \frac{4€}{25€} = \frac{16}{100} = 16\%$ teurer geworden.

Änderungen von 8% auf 9% nennt man Zunahme um 1 Prozentpunkt.

Kongruente Figuren

Sind zwei Figuren A und B deckungsgleich so nennt man sie zueinander kongruent.

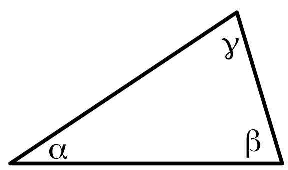
Kongruenzsätze:

Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie...

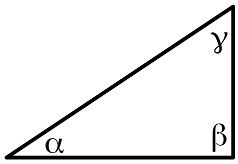
- in den Längen aller drei Seiten identisch sind. (sss-Satz)
- in den Längen zweier Seiten und dem Zwischenwinkel identisch sind. (sws-Satz)
- in der Länge einer Seite und den Winkeln, die an dieser Seite anliegen identisch sind. (wsw-Satz)
- in den Längen zweier Seiten und des gegenüberliegenden Winkels der größeren Seite identisch sind. (SsW-Satz)

Dreiecke

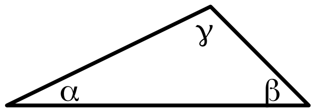
- Spitzwinkliges Dreieck: Drei spitze Innenwinkel $\alpha<90°, \beta<90°, \gamma<90°$



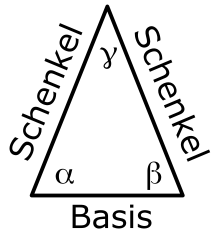
- rechtwinkliges Dreieck: besitzt einen 90°-Winkel



- stumpfwinkliges Dreieck: größter Innenwinkel ist stumpf ($90° < \gamma < 180°$)



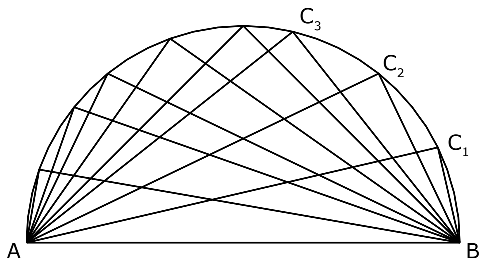
- Dreiecke heißen genau dann gleichschenklig, wenn sie eine Symmetrieachse besitzen.



- Dreiecke heißen gleichseitig, wenn alle drei Seiten gleich lang sind. Dann sind auch alle drei Innenwinkel gleich groß, nämlich 60°.

Thaleskreis

Ein Dreieck ABC ist genau dann rechtwinklig bei C, wenn der Punkt C auf dem sogenannten Thaleskreis über der Seite [AB] liegt.



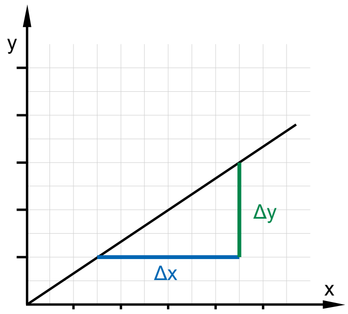
Transversalen im Dreieck

Transversalen sind Geraden, die durch einen Eckpunkt des Dreiecks gehen.

- Die Mittelsenkrechten der drei Seiten des Dreiecks schneiden sich alle im Punkt M, dem Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC. Die drei Eckpunkte liegen alle auf diesem Kreis.
- Eine Höhe eines Dreiecks, ist eine Gerade, die durch einen Eckpunkt verläuft und die gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung rechtwinklig schneidet.
- Alle drei Winkelhalbierenden schneiden sich im Punkt W, welcher von allen drei Seiten des Dreiecks gleich weit entfernt ist. Der Punkt W ist der Mittelpunkt des Inkreises, der die drei Seiten von innen berührt.

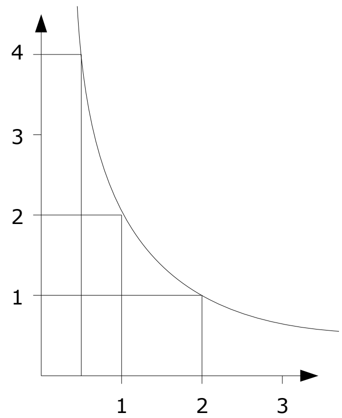
8. Klasse

Direkte Proportionalität



- dem n-Fachen von x entspricht das n-Fache von y und umgekehrt
- der Quotient y:x von zwei direkt proportionalen Größen hat immer den gleichen Wert → Proportionalitätsfaktor $q=\frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Zuordnungsvorschrift: $x \mapsto q \cdot x$

Indirekte Proportionalität



- dem n-Fachen von x entspricht der n-te Teil von y und umgekehrt
- die Produkte zugeordneter Größen sind immer gleich, die Zuordnungsvorschrift lautet: $x \to \frac{p}{x}$, wobei p den konstanten Wert dieser Produkte angibt
- z.B. in der Zeichnung: $1 \cdot 2=2$, $0{,}5 \cdot 4=2$, $2 \cdot 1=2$
- die Punkte des Graphen einer indirekt proportionalen Zuordnung liegen auf einer Hyperbel

Funktionen

Funktionsbegriff

- bei einer Funktion wird einem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet
- die Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$ ist die Menge aller für x zulässigen Werte
- die Wertemenge $\mathbb{W}_f$ ist die Menge aller Funktionswerte
- jeder Term f(x) legt eine Funktion $f: x \to f(x)$ (mit $x \in D_f$) fest
- die x-Koordinate des Schnittpunktes des Graphen einer Funktion mit der x-Achse ist die Nullstelle der Funktion

Proportionale Funktion

- die Funktion $f: f(x)=m \cdot x$ beschreibt die direkte Proportionalität von x, y
- der Graph dieser Funktion ist eine Gerade mit $m=\frac{y}{x}$ (m=Steigung der Geraden)

Umfang und Flächeninhalt eines Kreises

- Umfang eines Kreises: $U=2 \cdot \pi \cdot r$
- Flächeninhalt eines Kreise: $A=\pi \cdot r^2$

Lineare Funktionen

- die Funktion $f(x)=m \cdot x+t$ heißt „lineare Funktion" wobei t ($t \in \mathbb{Q}$) der y-Achsenabschnitt ist und m die Steigung
- verläuft die Gerade durch die Punkte $P(x_p|y_p)$ und $Q(x_q|y_q)$, so gilt für die Geradensteigung $m=\frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

2.Lineare Ungleichungen

- jede Ungleichung besteht aus zwei Termen, durch ein Ungleichheitszeichen getrennt z.B. $x<12$, $2y>2$, $3x-7\geq 8(x-2)$
- die vorgegebene Menge aller Zahlen zum Einsetzen in die Ungleichung heißt Grundmenge G
- die Menge aller Lösungen $\mathbb{L}$, die beim Einsetzen in eine Ungleichung diese lösen können, werden entweder in der Mengenschreibweise oder Intervallschreibweise dargestellt
- Beispiel: $2(x+1)>5x-4$
  $2x+2>5x-4 \quad |-2-5x$
  $-3x>-6 \quad |:(-3)$
  $x<2 \Rightarrow L = \{x|x<2\} =]-\infty;2[$

Gleichungen und Gleichungssysteme

Lineare Gleichungen mit zwei Variablen

- für lineare Gleichungen der Form ax+by=c (bei der nicht gleichzeitig a=0 und b=0 sind) mit den Variablen x und y gilt:
  1. jede Lösung besteht aus einem Zahlenpaar
  2. es gibt unendlich viele Lösungen
  3. die den Lösungen entrsprechenden Punkte liegen auf einer Gerade

Lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen

- zwei lineare Gleichungen mit jeweils zwei Variablen bilden ein lineares Gleichungssystem z.B. $3x+7y=10$ und $5x-y=3$
- ein Zahlenpaar heißt Lösung des linearen Gleichungssystems, wenn es jede Gleichung des Systems erfüllt
- lineare Gleichungssystem können auf verschiedenen Wegen gelöst werden:
  - zeichnerisch: Zeichnung der beiden Gleichungen, die gemeinsamenPunkte der beiden Geraden stellen die Lösung des linearen Gleichungssystems dar
  - Einsetzungsverfahren: Eine der Gleichungen wird nach einer Variablen aufgelöst, der entstandene Term wird dann in die andere Gleichung eingesetzt, um die zweite Variable zu ermitteln. Mit dem Wert der zweiten wird dann der Wert der ersten Variable ermittelt.
  - Additionsverfahren: Beide Gleichungen werden addiert, sodass eine Variable „wegfällt", häufig muss zuerst eine der Gleichungen mit einer geeigneten Zahl multipliziert werden.Die nach der Addition entstandene Lösung wird dann in eine der ursprünglichen Gleichungen eingesetzt, um den Wert der anderen Variable zu bestimmen.

Wahrscheinlichkeit

Ergebnismenge

- ist die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments und wird mit Ω bezeichnet

Teilmenge

- A ist Teilmenge von Ω, wenn jedes Element von A auch in Ω enthalten ist, schreibt man: $A\subset\Omega$

Ereignis

- jede Teilmenge A der Ergebnismenge Ω nennt man Ereignis

Gegenereignis

- Das Gegenereignis zum Ereignis A besteht aus den Ergebnissen von Ω, die nicht zu A gehören, man schreibt: $\overline{A}=\Omega\setminus A$

Wahrscheinlichkeit

- jedem Ereignis A wird eine Wahrscheinlichkeit P(A) zugeordnet
- P(A) wird durch das Experiment oder durch die sich stabilisierende Häufigkeit eines Ereignisses nahe gelegt

Laplace-Experiment

- sind Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind
- bei n-Ergebnissen ist die Wahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis $\frac{1}{n}$

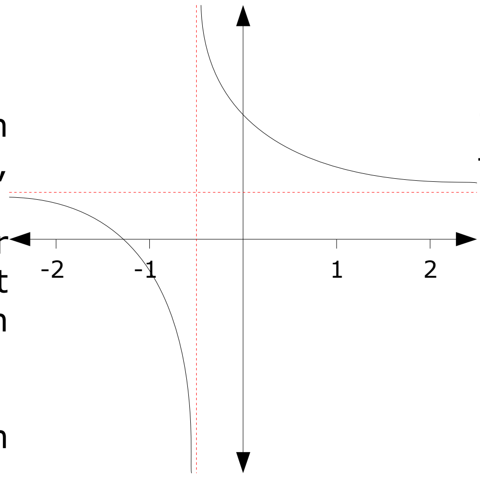
Laplace-Wahrscheinlichkeit

- die Wahrscheinlichkeit P(A) eines Ergebnisses A erhält man mittels:
  $\frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}=\frac{|A|}{|\Omega|}$

Gebrochen rationale Funktionen

1. Eigenschaften

- Beispiele: $f(x)=\frac{4}{(x+5)}$, $g(x)=\frac{(x-5)}{(2+x^2)}$
- Funktionen deren Funktionsterm ein Bruch ist
- nicht zur Definitionsmenge gehören Zahlen, für welche der Nenner 0 wird
- eine Gerade, der sich der Graph einer Funktion beliebig genau annähert, nennt man eine Asymptote des Funktionsgraphen (siehe Zeichnung)



2. Rechnen mit Bruchtermen

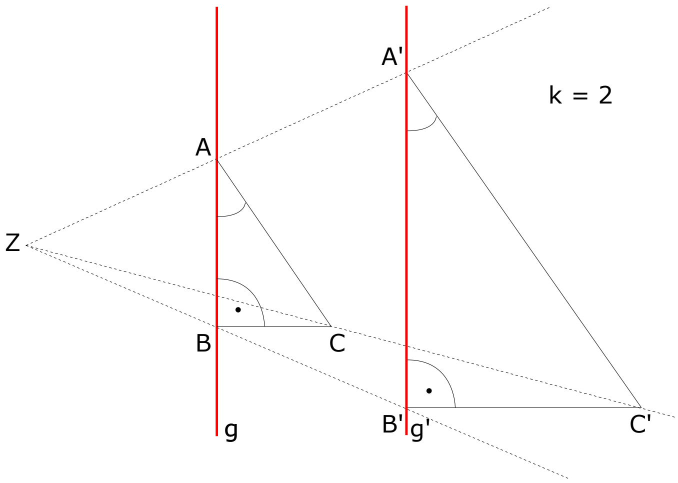
- beim Kürzen: Zähler und Nenner mit dem selben Term dividieren
- beim Erweitern: Zähler und Nenner mit dem selben Term multiplizieren
- Bruchterme mit gleichen Nennern werden addiert bzw. subtrahiert, durch Additon bzw. Subtraktion der Zähler, der Nenner wird beibehalten
- Bruchterme mit unterschiedlichen Nennern müssen zuerst auf einen gleichen Nenner gebracht werden
- Multiplikation von Bruchtermen durch Multiplikation von Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner
- Division von Bruchtermen durch Multiplikation mit dem Kehrbruchterm
- Bruchgleichungen werden durch Multiplikation, mit dem Haupotnenner der vorkommenden Nenner in nennerfreie Gleichungen umgeformt
- für die Lösungen der Bruchgleichungen darf kein Nenner 0 werden

3. Negative Exponenten

- es gilt: $x^{-n}=\frac{1}{x^n}$, $x^m\cdot x^n=x^{m+n}$, $x^m\div x^n=x^{m-n}$
- z.B.: $\frac{x^3\cdot x^{-4}}{x^{-2}}=x^{3-4}\cdot x^2=x$

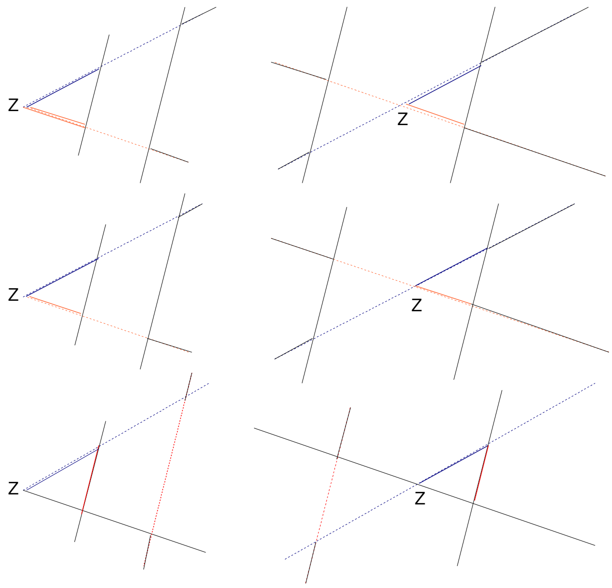
Ähnlichkeit

1. Zentrische Streckungen



- bei einer zentrischen Streckung mit dem Zentrum Z und dem Streckfaktor k ($k>0$) gilt für den Bildpunkt B zu einem Punkt P ($P \neq Z$):
  1. P' liegt auf der von Z ausgehenden Halbgeraden durch P
  2. $\overline{ZP'} = k \cdot \overline{ZP}$
- ist $k>1$, so wird vergrößert
- ist $0<k<1$, so wird verkleinert

2. Strahlensatz



- werden zwei Geraden, die sich in einem Punkt Z schneiden, von zwei Parallelen geschnitten, so verhalten sich:
  1. je zwei Abschnitte auf der einen Gerade wie die entsprechenden Abschnitte auf der anderen
  2. die Abschnitte auf den Parallelen wie die von Z aus gemessenen entsprechenden Abschnitte auf der einen bzw. der anderen Geraden

3. Ähnliche Figuren

- Figuren, z.B. F und G, nennt man zueinander ähnlich, wenn: F durch zentrische Streckung so vergrößerbar bzw. verkleinerbar ist, dass ihr Bild F' zu G kogruent ist
- Es gilt:
  1. entsprechende Strecken haben das gleiche Längenverhältnis
  2. entsprechende Winkel sind gleich groß
  3. wenn die Seitenlängen von G k-mal so lang wie die von F sind, ist der Flächeninhalt von G k^2-mal so groß wie der von F
- für ähnliche Dreiecke gilt:
  1. sie stimmen in zwei (und damit in drei) Winkeln überein (WW-Satz)

2. sie stimmen imVerhältnis ihrer Seiten überein (S:S:S-Satz)

9. Klasse

Wurzeln und Potenzen

Die Wurzel aus einer beliebigen quadrierten Variable a ist a:

$\sqrt{a^2}=a$, wobei $a\geq 0$ sein muss.

Wurzeln aus negativen Zahlen gibt es nicht!

Beispiel: $\sqrt{81}=\sqrt{9^2}=9$

Die Zahl unter der Wurzel heißt Radikand.

Weitere Regeln beim Wurzelziehen:

$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$, jedoch: $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

und:

$\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$, jedoch: $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, wobei hier $b\neq 0$ sein muss!

Ansonsten gelten die gleichen Rechengesetze wie für das Rechnen mit rationalen Zahlen:

Kommutativgesetz: $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{b}+\sqrt{a}$ und $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{b}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{(a\cdot b)}$

Assoziativgesetz: $\sqrt{a}+(\sqrt{b}+\sqrt{c})=(\sqrt{a}+\sqrt{b})+\sqrt{c}$

$\sqrt{a}\cdot(\sqrt{b}\cdot\sqrt{c})=(\sqrt{a}\cdot\sqrt{b})\cdot\sqrt{c}=\sqrt{(a\cdot b\cdot c)}$

Distributivgesetz: $\sqrt{a}\cdot(b+c)=\sqrt{a}\cdot b+\sqrt{a}\cdot c$

Zudem kann man „teilweise radizieren", d.h. man wendet das Kommutativgesetz an : $\sqrt{(a^2\cdot b)}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}$ und zieht dann die Wurzel, welche eine „normale" Zahl ergibt: $\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=a\cdot\sqrt{b}$.

Bsp.: $\sqrt{20}=\sqrt{(4\cdot 5)}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\cdot\sqrt{5}$

Dasselbe Prinzip funktioniert in die andere Richtung:

$4\cdot\sqrt{3}=\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{(16\cdot 3)}=\sqrt{48}$

Die Definitionsmenge von Wurzeln (Bsp.: $\sqrt{a}$) ist immer $\mathbb{R}_0^+$. Die Definitionsmenge lässt sich also aus der Ungleichung $a\geq 0$ berechnen.

Bsp.: Bestimme die Definitionsmenge von $\sqrt{(2\cdot x-8)}$!

Lsg.:

$(2\cdot x-8)\geq 0$

$2\cdot x\geq 8$

$x\geq 4$

Folglich ist die Definitionsmenge D = $[4;+\infty]$!

Vereinbarung: Brüche werden immer ohne Wurzel im Nenner geschrieben.

Um Wurzeln aus dem Nenner zu entfernen, multipliziert man sie mit sich selbst:

$$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{a\cdot\sqrt{b}}{b}$$

Bsp.:

$$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{15}{\sqrt{12}}=\frac{15\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}}=\frac{15\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{36}}=\frac{15\cdot\sqrt{3}}{6}=\frac{5\cdot\sqrt{3}}{2}$$

Jede rationale Zahl lässt sich als Bruch $\frac{p}{q}$ ($p\in\mathbb{Z};q\in\mathbb{N}$) angegeben. Gibt man sie als Dezimalzahl an, so ist diese Dezimalzahl entweder abbrechend oder (nichtabbrechend) periodisch, d.h. dieselbe Zahlenfolge wiederholt sich immer wieder.
Es gibt aber auch Zahlen, die sich nicht als Bruch darstellen lassen, die also nicht rational sind; ihre Darstellung als Dezimalzahl ist weder abbrechend noch periodisch. Solche Zahlen nennt man **irrationale Zahlen**.
Zusammen mit den rationalen Zahlen bilden sie die Zahlenmenge der **Reellen Zahlen**. Die Mathematik braucht reelle Zahlen, um auch Gleichungen wie $x^2=2$ (Lsg.: $x=\sqrt{2}=1{,}4142135...$) lösen zu können; früher genügte die rationale Zahlenmenge, weil nur Gleichungen wie $x^2=4$ (Lsg.: $x=2$) vorkamen.

Binomische Formeln

Zweigliedrige Terme wie $a+b$ oder $a-b$ nennt man auch **Binome**.
Binomische Formeln sind demzufolge Quadrate aus Binomen:

1. binomische Formel: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
2. binomische Formel: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3. binomische Formel: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

Oft verwendet man diese Formeln nicht zum Ausmultiplizieren, sondern um einen Term leichter zu machen.

Bsp.: Schreibe $\sqrt{(4x^2+8x+4)}$ ohne Wurzel:

$$\sqrt{(4x^2+8x+4)}=\sqrt{(2x+2)^2}=2x+2$$

Die n-te Wurzel

Definition: $\sqrt[n]{a}$ ist die Zahl, deren n-te Potenz a ergibt. „n" nennt man Wurzelexponent. Wir setzen $a\geq 0$ voraus. $n\in\mathbb{N};n\geq 2$
Bei der Quadratwurzel lässt man n normalerweise weg, bei höheren Wurzelexponenten schreibt man sie aus.

Bsp.:

$$\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$$

$$\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$$

Quadratwurzeln kann man auch als Potenzen darstellen:

$$\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$$

Ebenso Wurzeln mit höheren Wurzelexponenten n:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

Bsp.:

$$\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3^{\frac{3}{3}}=3^1=3$$

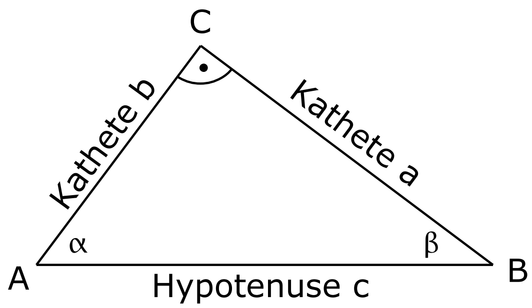
$$\sqrt[5]{x^{20}}=x^{\left(\frac{20}{5}\right)}=x^4$$

Für das Rechnen mit Brüchen als Exponenten gelten dieselben Regeln wie beim Rechnen mit ganzzahligen Exponenten.

Bsp.: $x^3\cdot[x^{\left(\frac{2}{3}\right)}]^{\left(\frac{1}{2}\right)}=x^3\cdot(x^{\left(\frac{2}{6}\right)})=x^{\left[3+\left(\frac{1}{3}\right)\right]}=x^{\left(\frac{10}{3}\right)}=\sqrt[3]{x^{10}}$

Sinus, Cosinus und Tangens

Vorsicht: Folgende Regeln dürfen nur in Dreiecken angewendet werden, in denen ein rechter Winkel vorliegt.



Das Verhältnis der zwei Strecken, die einen spitzen Winkel einschließen, bezeichnet man als Tangens. Durch ihn kann man den Betrag des Winkels errechnen:

$$\tan\alpha=\frac{(\text{Ankathete des Winkels } \alpha)}{(\text{Gegenkathete des Winkels } \alpha)}$$

im Fall der Zeichnung also $\tan\alpha=\frac{b}{a}$ bzw beim Winkel β: $\tan\beta=\frac{a}{b}$

Dasselbe gilt auch für das Verhältnis zwischen der Gegenkathete eines Winkels und der Hypotenuse. Dieses Verhältnis nennt man Sinus:

$$\sin\alpha=\frac{(\text{Gegenkathete des Winkels } \alpha)}{(\text{Hypotenuse})}$$

im Fall der Zeichnung also $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ bzw beim Winkel β: $\tan\beta=\frac{b}{c}$

Wie der Sinus funktioniert auch der Cosinus, bei dem das Verhältnis zwischen Ankathete eines Winkels und der Hypotenuse beschrieben wird:

$$\cos\alpha=\frac{(\text{Ankathete des Winkels } \alpha)}{(\text{Hypotenuse})}$$

im Fall der Zeichnung also $\cos\alpha=\frac{b}{c}$ bzw beim Winkel β: $\cos\beta=\frac{a}{c}$

Durch diese drei Beziehungen lassen sich aus zwei gegebenen Größen im Dreieck alle Winkel und Seitenlängen ausrechnen. Hat man einen Winkel und eine Seitenlänge gegeben, kann man durch Umstellen der Formel die zweite Seitenlänge bestimmen:

Es seien der Winkel α und die Seitenlänge c gegeben. Die Seitenlänge a ist gesucht. Man verwendet den Sinus, da er alle Elemente enthält: $\sin\alpha=\frac{a}{c}$

Dann stellt man um, sodass a auf einer Seite steht:

$a=\sin\alpha\cdot c$ Dann noch eintippen und fertig.

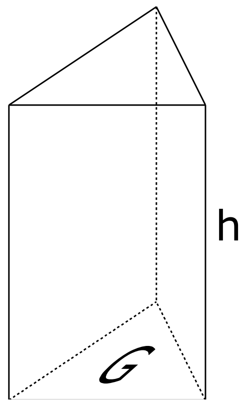
Anders ist es wenn man aus zwei gegebenen Seitenlängen den Winkel errechnen will. Zuerst errechnet man den Wert des Sinus/ Cosinus/ Tangens, dann nimmt man den Kehrbruch davon, macht also „hoch -1".

Bsp.: a und b sind gegeben, α soll gefunden werden.

Man verwendet den Tangens; hier kommt alles gewünschte vor. Man rechnet den Bruch $\frac{b}{a}$ aus und tippt den erhaltenen Wert im Taschenrechner nach Drücken der $\tan^{-1}$ - Taste ein.

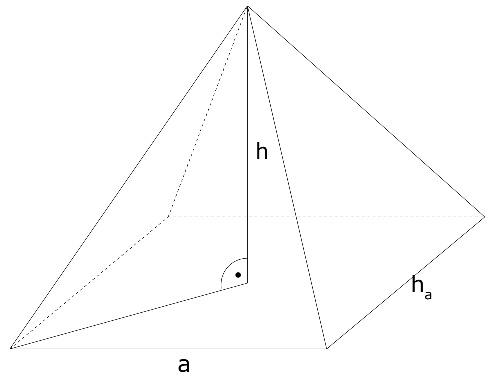
Volumen der Grundkörper

Prisma



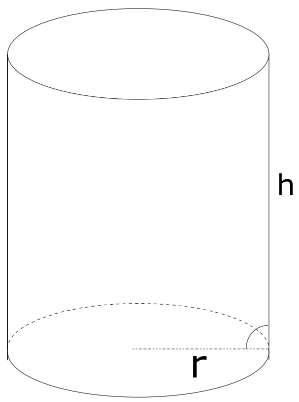
$$V_{Prisma} = G_{Prisma} \cdot h$$

Pyramide



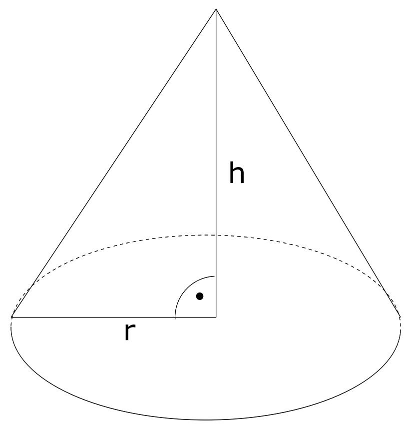
$$V = \frac{1}{3} \cdot G_{Pyramide} \cdot h$$

Zylinder



$$V_{Zylinder} = G_{Zylinder} \cdot h$$
$$G_{Zylinder} = r^2 \cdot \pi$$

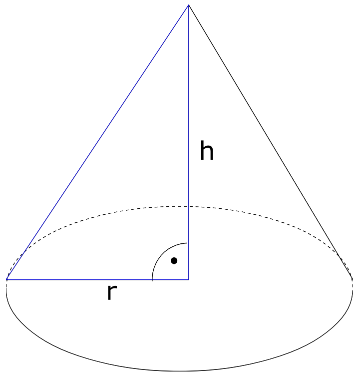
Kegel



$$V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot G_{Kegel} \cdot h$$
$$G_{Kegel} = r^2 \pi$$

Stützdreiecke

Ein Stützdreieck ist ein rechtwinkliges Dreieck, dass senkrecht auf der Grundfläche steht und in dem man entweder die Katheten oder die Hypotenuse mit dem Satz des Pythagoras berechnen kann



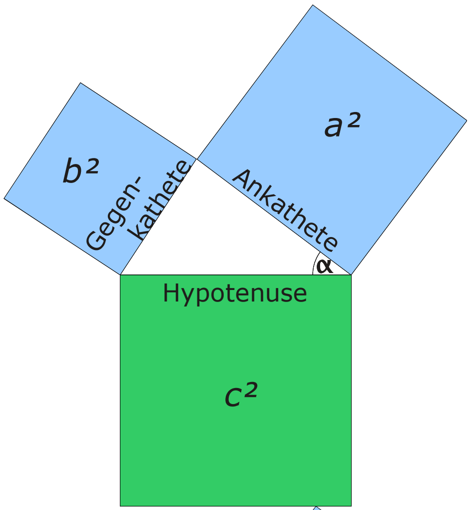
Satzgruppe des Pythagoras

Satz des Pythagoras: „In jedem rechtwinkligen Dreieck hat das Quadrat über der Hypotenuse den gleichen Flächeninhalt wie die Quadrate über den beiden Katheten zusammen."

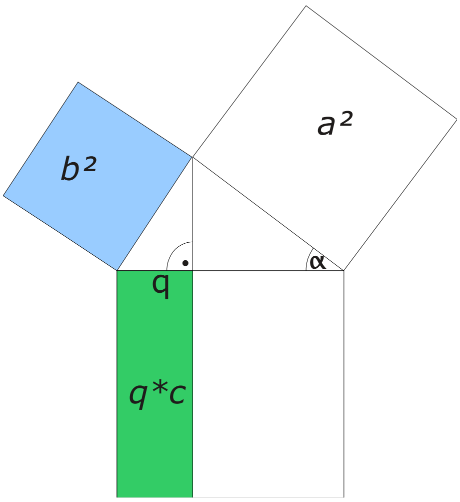
$$c^2=a^2+b^2$$

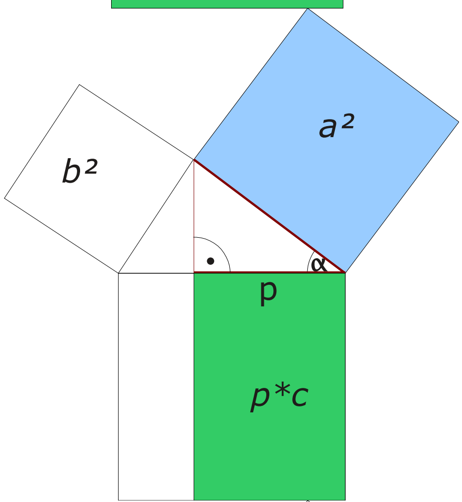
$$c = \sqrt{a^2+b^2}$$

Diese Formel gilt nur in einem rechtwinkligen Dreieck!

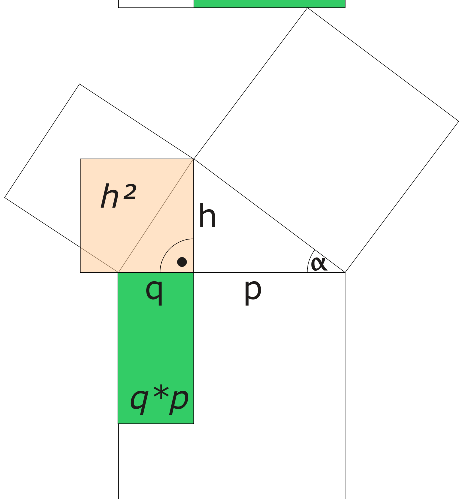


Kathetensatz: Das Quadrat über einer Kathete hat den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck über dem anliegenden Hypotenusenabschnitt.





Höhensatz: Das Quadrat über der Höhe auf der Hypotenuse hat den gleichen Flächeninhalt wie das Rechteck aus den beiden Hypotenusenabschnitten.



Quadratische Funktion:

Quadratische Funktionen haben die Form $f: x \rightarrow a x^2 + b x + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

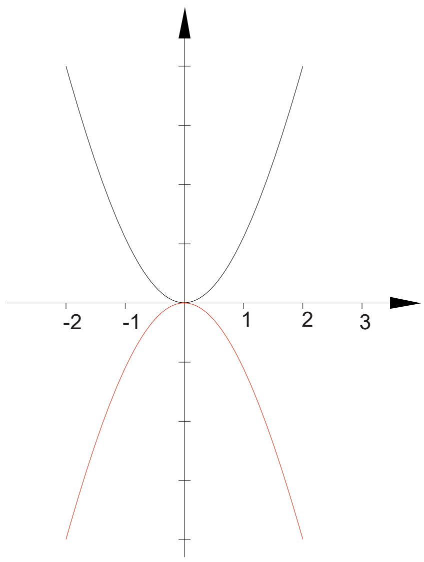
Die Graphen

Normalparabel und Spiegelung an der x-Achse:

Normalparabel: $f_1: x \rightarrow x^2$

Spiegelung: $f_2: x \rightarrow -x^2$

Scheitelpunkt bei (0|0), achsensymmetrisch zur y-Achse



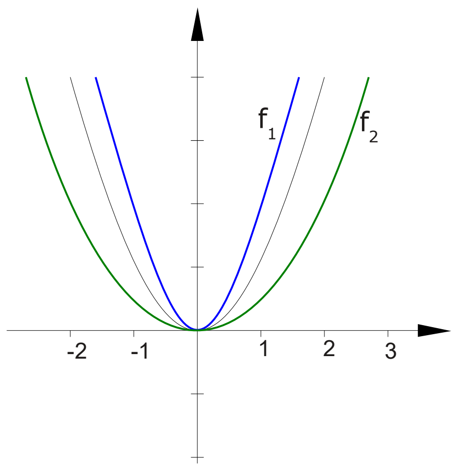
Streckung, Stauchung

Eine quadratische Funktion der Form $f: x \rightarrow ax^2$ mit der Variablen a wird bzgl. y-Achse gestreckt oder gestaucht.

Streckung: $a>1$; Bsp: $f_1: x \rightarrow 2x^2$

Stauchung: $0<a<1$; Bsp: $f_2: x \rightarrow \frac{1}{2}x^2$

Bei $f: x \rightarrow -ax^2$ wird die gestreckte oder gestauchte Funktion an der x-Achse gespiegelt. Das gleiche gilt auch für die gestauchte Funktion.



Verschiebung an der x-Achse/y-Achse

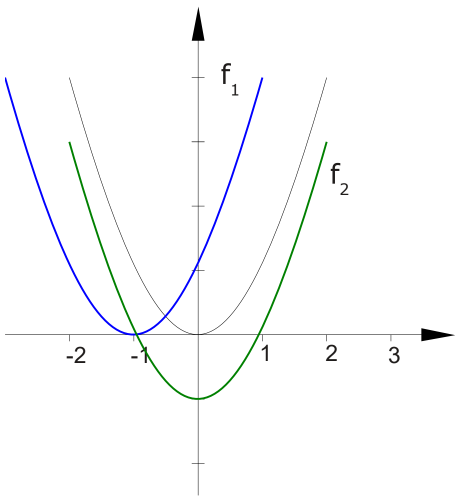
an der x-Achse: $f: x \rightarrow (x+a)^2$

Bsp.: $f_1: x \rightarrow (x+1)^2$

an der y-Achse: $f: x \rightarrow x^2 + a$

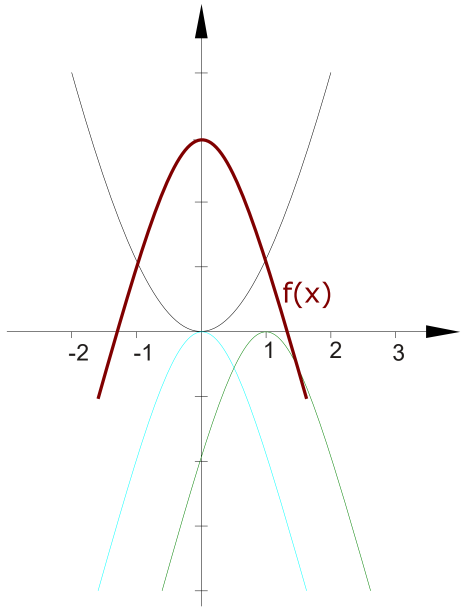
Bsp.: $f_2: x \rightarrow x^2 - 1$

Die Verschiebung an der x-Achse verläuft in die entgegen gerichtete Richtung, d.h. bei $f: x \rightarrow (x+a)^2$ wird die Parabel um a nach links verschoben und bei $f: x \rightarrow (x-a)^2$ wird die Parabel um a nach rechts verschoben.



Beispiel einer Funktion mit Spiegelung, Streckung und Verschiebung:

$f: x \rightarrow -2(x-1)^2+3$



Rechnen mit quadratischen Gleichungen

Um mit quadratischen Gleichungen rechnen zu können, müssen erst die Klammern aufgelöst werden, falls die Gleichung in Scheitelform vorliegt.

Scheitelform: $f: x \rightarrow a(x+v)^2+w$

aufgelöste Klammern: $ax^2+2avx+v^2+w$ mit $2av = b$ und $v^2+w = c$

$\rightarrow$ ax^2+bx+c

Sobald die Scheitelform aufgelöst wurde, kann man die dadurch entstehende Gleichung für die Berechnung der Nullstellen und des Achsenabschnitts verwenden.

a) Achsenabschnitt

$f(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \Rightarrow f(0) = c$

b) Nullstellen

Für die Berechnung der Nullstellen einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2+bx+c = 0$ wird die Mitternachtsformel benötigt:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Beispiel: $f(x) = x^2-4x+3 = 0$

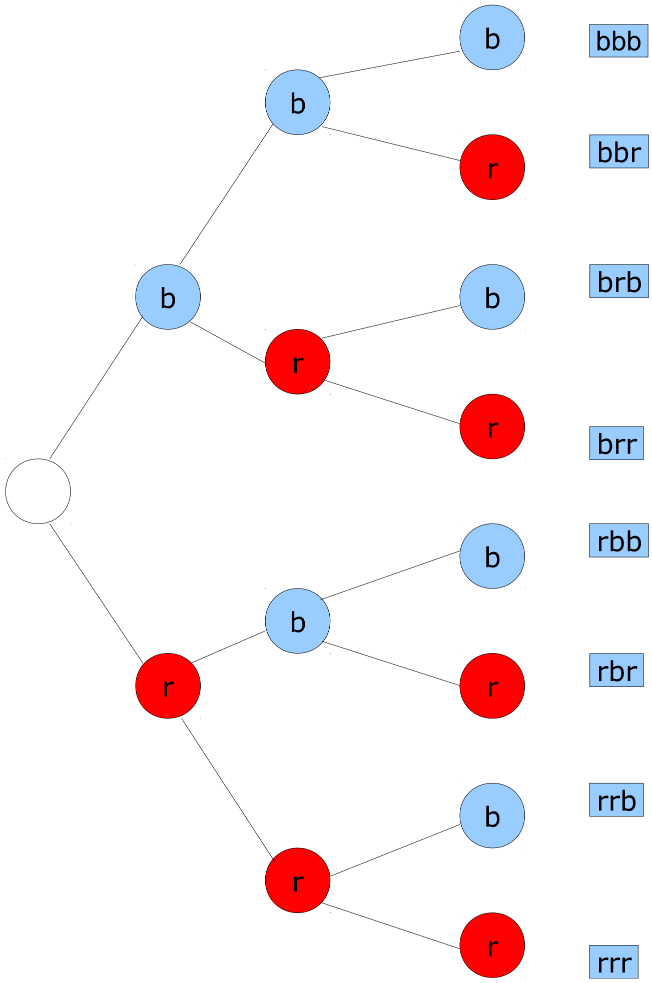
$$x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2-4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1=3 \text{ und } x_2=1$$

Mehrstufige Zufallsexperimente

Pfadregeln

- Der Summenwert der Wahrscheinlichkeiten auf den Teilpfaden, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ist stets 1
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten auf dem (Gesamt-) Pfad, der zu diesem Ergebnis führt.
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten für die zugehörigen Ergebnisse.

Bsp.: Aus einer Urne mit 3 blauen und 2 roten Kugeln wird dreimal mit zurücklegen gezogen.

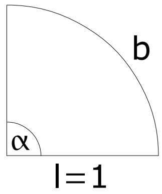


10. Klasse

Kreis und Kugel

Das Bogenmaßsystem

Das Bogenmaß ist eine Alternative zum Gradmaß, mit dem die Größe von Winkeln angegeben werden kann. Es wird die Bogenlänge b des Kreissektors unter dem Winkel α eines Einheitskreises anstelle des Winkels selbst betrachtet.



Es gilt: $\frac{b}{2\pi}=\frac{\alpha}{360°}\rightarrow \mathbf{b=\alpha\cdot\frac{2\pi}{360°}}\rightarrow \mathbf{\alpha=b\cdot\frac{360°}{2\pi}}$

Somit ergibt sich u.a.: $360°\triangleq 2\pi;180°\triangleq\pi;90°\triangleq\frac{\pi}{2}$

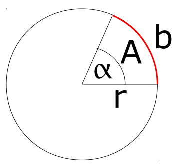
Die Kreiszahl π**=3,141593**...

π ist eine irrationale und eine transzendente Zahl.

Irrational heißt, dass sich die Zahl nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lassen kann; **transzendent** heißt, dass sie sich nicht als Lösung einer algebraischen Gleichung berechnen lässt. Algebraische Gleichungen haben die Form $ax+b=0;ax^2+bx+c=0;ax^3+bx^2+cx+d=0;\ldots;$ mit $a(\neq 0),b,c,d,\ldots\in\mathbb{Z}$

Der Kreissektor

Der Flächeninhalt A eines Kreissektors ist zum Mittelpunkts-winkel α direkt proportional.



Es gilt: $\frac{A}{r^2\pi}=\frac{\alpha}{360°}\rightarrow \mathbf{A=r^2\pi\cdot\frac{\alpha}{360°}=\frac{1}{2}rb}$

Das Kugelvolumen

Der Satz von Cavalieri verlangt, dass das Volumen eines kegelförmig ausgehöhlten Zylinders $V=r^3\pi-\frac{1}{3}\pi r^2h$ und Halbkugelvolumen gleich sein müssen.

Es gilt: $\mathbf{V_{Kugel}=\frac{4}{3}\pi r^3}$

Der Oberflächeninhalt der Kugel

Durch Zerlegung der Kugeloberfläche in kleine Teilkörper ergibt sich:

$\mathbf{A_{Kugel}=4\pi r^2}$.

Sinus und Kosinus

Anwendung am Einheitskreis / am rechtwinkligen Dreieck

$$y = \sin\varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$x = \cos\varphi = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Tipp: Große Zahlen auf dem Taschenrechner

Aufgabe: $8\cdot 2^{24554}$ als Zehnerpotenz

1. Logarithmieren
   $x = 8\cdot 2^{24554}$
   $\log x = \log(8\cdot 2^{24554})$
2. Erste Rechenregel
   $\log x=\log 8+\log(2^{24554})$
3. Dritte Rechenregel
   $\log x=\log 8+24554\cdot\log 2$
4. **Taschenrechnergenau** ausrechnen
   $\log x=0{,}903+7391{,}490=7392{,}394$
5. Logarithmus entfernen
   $x=10^{7392{,}394}$
6. Potenzgesetze anwenden
   $x=10^{0{,}394}\cdot 10^{7392}=2{,}475\cdot 10^{7392}$

Zusätzlich gelten folgende Umrechnungsregeln:

I. Quadrant: $\sin\varphi = \frac{y}{r} = y$, $\cos\varphi = \frac{x}{r} = x$

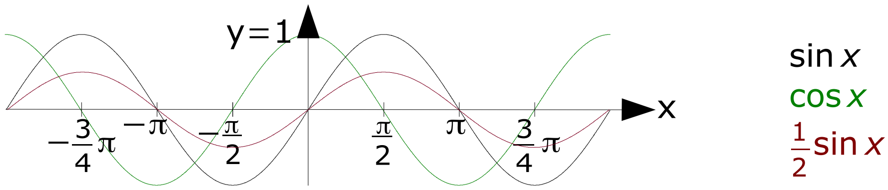
II. Quadrant: $\sin\varphi = \sin(\pi - \varphi)$, $\cos\varphi = -\cos(\pi - \varphi)$

III. Quadrant: $\sin\varphi = -\sin(\varphi - \pi)$, $\cos\varphi = -\cos(\varphi - \pi)$

IV. Quadrant: $\sin\varphi = -\sin(2\pi - \varphi)$, $\cos\varphi = \cos(2\pi - \varphi)$

Einfluss der Parameter in den trigonometrischen Funktionen

Allgemeiner Sinus: $\boldsymbol{a}\,\mathbf{sin}(\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{d}$



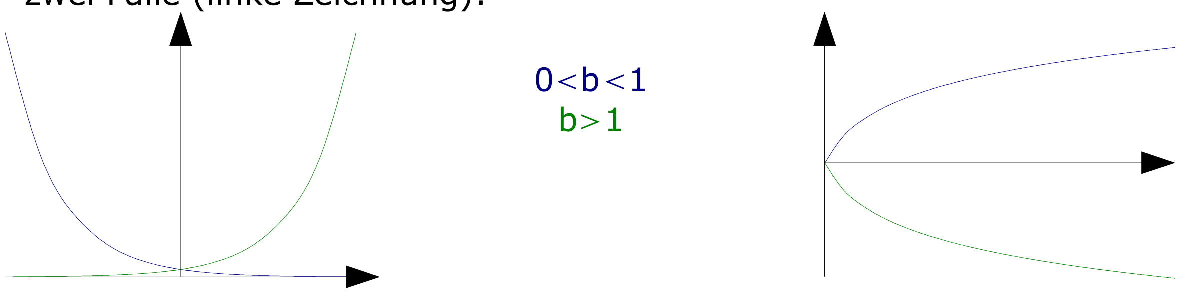
a : Dehnung/Stauchung in y-Achsenrichtung (+: steiler, -: flacher)
b : Dehnung/Stauchung in x-Achsenrichtung (+: breiter, -: kürzer)
c : Verschiebung in x-Achsenrichtung (+: links, -: rechts)
d : Verschiebung in y-Achsenrichtung (+: nach oben, -: nach unten)

Exponentielles Wachstum (Abnahme) / Logarithmen

Allgemeine Kennzeichen der Exponentialfunktion

- Nur für positive Exponenten definiert
- Gemeinsamer Schnittpunkt in $(0|1)$

Exponentielles Wachstum: Gleichungen der Form $\mathbf{f(x) = ab^x}$ mit $\mathbf{b \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}}$ steigen exponentiell. Mit $a=1$ nennt man $f(x)$ Exponentialfunktion. Es gibt zwei Fälle (linke Zeichnung):



Logarithmisches Wachstum

Der Logarithmus ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion.

Es gilt: $\mathbf{\log_b(b^x) = x}$ mit $\mathbf{b \in \mathbb{R}^+ \rightarrow b^x \in \mathbb{R}^+}$

Es gibt zwei Fälle (rechte Zeichnung oben).

Kurzschreibweise: $\log_{10}(x) = \lg(x)$

Rechenregeln bei Logarithmen

1. $\mathbf{\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)}$
2. $\mathbf{\log_b(x : y) = \log_b(x) - \log_b(y)}$
3. $\mathbf{\log_b(x^e) = e\log_b(x)}$
4. $\mathbf{\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}}$

Anwendung

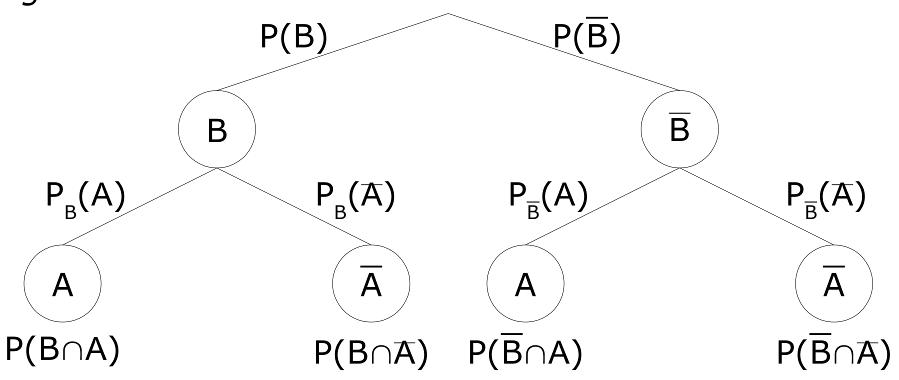
Exponentielles Wachstum tritt z.B. bei Vermehrungen auf. Exponentielle Abnahme liegt beispielsweise bei Radioaktivität zugrunde:

$N(t)=N(0s)\cdot e^{\frac{-\ln(2)\cdot t}{t_{1/2}}}$ mit $N(t)$: Anzahl Atome zum Zeitpunkt t,
$t_{1/2}$: Halbwertszeit

Der Logarithmus wird z.B. beim pH-Wert verwendet: $pH=-\log_{10}\left(c_{H_3O^+}\cdot\frac{l}{mol}\right)$

Stochastik

Baumdiagramm



Vierfeldertafel

	B	$\overline{B}$	
A	7	1	8
A	9	28	37
	16	29	45

Absolute Häufigkeit

	B	$\overline{B}$	
A	15,6%	2,2%	17,8%
$\overline{A}$	20,0%	62,2%	82,2%
	35,6%	64,4%	100%

Relative Häufigkeit

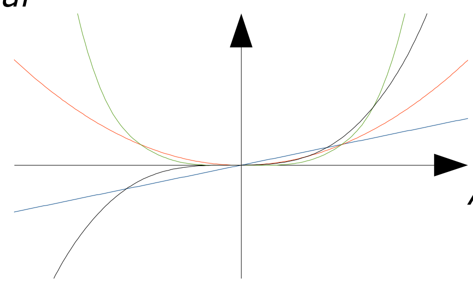
Bedingte Wahrscheinlichkeit

$P_B(A):=$ Ereignis A tritt ein, wenn B bereits sicher ist
(math.: „A unter der Bedingung B")

$P_B(A):=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ → Baumdiagramm sehr gut geeignet

Ganzrationale Funktionen (Polynome)

Verlauf



x; x^2; x^3; x^4

→ Für gerade Potenzen achsensymmetrisch, für ungerade punktsymmetrisch

Allgemeine Form

$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1 x+a_0$

mit $n\in\mathbb{N}_0, a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

n: Grad des Polynoms, a_n: Koeffizienten

Nullstellenform

Für eine Gleichung der Form $f(x)=(x-N_1)(x-N_2)(x-N_3)...$ gilt: $f(N_i)=0$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Um die Nullstellen zu ermitteln, muss $f(x)=0$ gelöst werden.

Es gibt maximal n Nullstellen. Diese können durch Polynomdivision ermittelt werden. Wenn mehrmals dieselbe Nullstelle herauskommt, wird diese als mehrfache (doppelte, dreifache, …) Nullstelle bezeichnet. Kommt die Nullstelle k-mal vor und ist k ungerade, wechselt $f(x)$ an dieser Stelle das Vorzeichen, ansonsten nicht.

Musterrechnung: $x^3-2x^2-2x-3=0$ (3 ist eine NSt.)

$$
\begin{array}{lllll}
 & (x^3-2x^2 & -2x & -3):(x-3)=x^2+x+1 \\
-(& \underline{x^3-3x^2}) & & \\
 & \quad\;\; x^2 & & \\
-(& \quad\;\; \underline{x^2} & \underline{-3x}) & \\
 & & \quad x & \\
-(& & \quad \underline{x} & \underline{-3}) \\
 & & & \;\; 3
\end{array}
$$

Eigenschaften

Verhalten im Unendlichen (n bezeichnet den Grad des Polynoms, a_n den Koeffizienten der höchsten Potenz)

- a_n positiv, n gerade: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$
- a_n positiv, n ungerade: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
- a_n negativ, n gerade: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$
- a_n negativ, n ungerade: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

Symmetrie

Nur gerade Exponenten → achsensymmetrisch zur y-Achse

Nur ungerade Exponenten → punktsymmetrisch zum Ursprung

Gemischte Exponenten → keine Symmetrie